Exercice 1 — 10 min — 2,5 pt

1°) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan(x)$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $g^{-1}(1)$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(g^{-1}\right)(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

c) En déduire la valeur de $I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$.

2°) Soit (I_n) la suite définie sur IN^* par : $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$. Déterminer alors la limite de (I_n).

c) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$.

3°) a) Vérifier que pour tout réel x, $\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$. Calculer alors I_2 et I_4.

b) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x^4+x^2-3}{x^2+1}$. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0,1]$.

Exercice 2 — 25 min — 4 pt

On considère les suites (I_n) et définie sur IN^* par : $I_n=\int_0^1\left(1-t^2\right)^n dt$ et $J_n=\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt$.

1°) Calculer I_1

2°) a) Montrer que pour tout $0\le t\le 1$ on a : $1-t^2\ge 0$.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_{n+1}-I_n=-J_n$.

c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ; en déduire qu'elle est convergente.

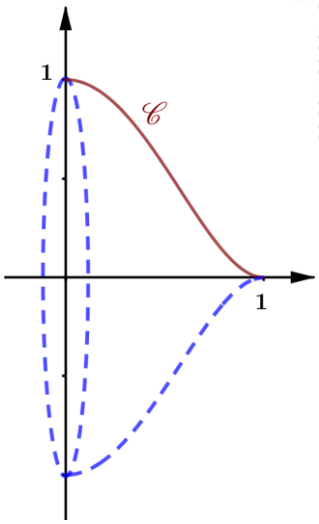
3°) a) Déterminer une primitive de la fonction $t\mapsto t\left(1-t^2\right)^n$.

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par partie, que $J_n=\frac{1}{2(n+1)}I_{n+1}$.

c) Montrer alors que pour tout $n\in IN^*$: $I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+3}I_n$.

d) La courbe C ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f\left(1-t^2\right)=\left(1-t^2\right)^2$

Calculer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendre par la rotation de C autour de l'axe d'abscisses.



www.takiacademy.com